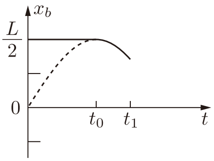
$$x_b(t) = \frac{L}{2}\cos\{\omega(t-t_0)\}$$
$$= \frac{L}{2}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \quad \cdots\cdots (答)$$

別解

図 3 の x_b の sin カーブを $0 \leqq t \leqq t_0$ の領域にも伸ばすと，t_0 が単振動の周期の $\frac{1}{4}$ であることから，次図のように原点を通過する。



このグラフを式で表して，

$$x_b = \frac{L}{2}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \quad \cdots\cdots (答)$$

(2) 衝突が初めて起こるのは，初めて $x_a = x_b$ となったときなので，

$$-\frac{L}{2}\cos\omega t = \frac{L}{2}\sin\omega t$$
$$\therefore \quad \sin\omega t + \cos\omega t = 0 \qquad (\because \ L > 0)$$
$$\therefore \quad \sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

よって，整数 n を用いて，

$$\omega t = n\pi - \frac{\pi}{4} \quad \cdots\cdots ①$$

$t_1 > t_0$ より，$n = 1$ のときの時刻が $t = t_1$ で，

$$t_1 = \frac{3\pi}{4\omega} = \frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \cdots\cdots (答)$$

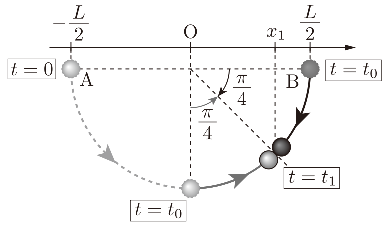
また，このときの座標 x_1 は，

$$x_1 = \frac{L}{2}\sin\omega t_1 = \frac{\sqrt{2}\,L}{4} \quad \cdots\cdots (答)$$

別解

単振動が等速円運動の正射影であることを利用する。A，B の角振動数，振動中心，振幅が同じであることから，A，B は同一円周上を速さ v_0 で等速円運動している物体の正射影であると考えることができる。A が $x = 0$ から $x = x_1$ まで達するのにかかる時間と，B が $x = \frac{L}{2}$ から $x = x_1$ まで達するのにかかる時間が等しいことから，対応する円運動において A，B がそれぞれ $\frac{\pi}{4}$ だけ回転したときに衝突することがわかる。これは周期の $\frac{1}{8}$ に対応するので，

$$t_1 = t_0 + \frac{1}{8}T = \frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \cdots\cdots (答)$$
$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{2} = \frac{\sqrt{2}\,L}{4} \quad \cdots\cdots (答)$$



(3) 求める A，B の速度をそれぞれ v_{a1}，v_{b1} とする。時刻 t における A，B の速度をそれぞれ $v_a(t)$，$v_b(t)$ とすると，

$$v_a(t) = \frac{dx_a}{dt} = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$
$$v_b(t) = \frac{dx_b}{dt} = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

よって，$t = t_1$ を代入して，

$$\left.\begin{aligned} v_{a1} &= v_a(t_1) = \frac{L}{4}\sqrt{\frac{2k}{m}} \\ v_{b1} &= v_b(t_1) = -\frac{L}{4}\sqrt{\frac{2k}{m}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (答)$$

別解 1

力学的エネルギー保存則より，

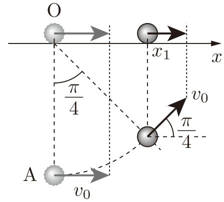
$$\frac{1}{2}k\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m{v_{a1}}^2 + \frac{1}{2}k{x_1}^2$$
$$\frac{1}{2}k\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m{v_{b1}}^2 + \frac{1}{2}k{x_1}^2$$

$v_{a1} > 0$，$v_{b1} < 0$ を考慮して，

$$\left.\begin{aligned} v_{a1} &= \frac{L}{4}\sqrt{\frac{2k}{m}} \\ v_{b1} &= -\frac{L}{4}\sqrt{\frac{2k}{m}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (答)$$

別解 2

単振動は円運動の正射影であるので，A の運動は次図のようになる。



よって，速度ベクトルの正射影を考えて，

$$v_{a1} = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0 = \frac{L}{4}\sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \cdots\cdots (答)$$

同様に，B の運動は次図のようになる。