［参考］

n^3-7n+9 が 3 の倍数

をいう部分は「連続 3 整数の積」を利用して，以下のように変形してもよい。

$$\begin{aligned}&(n^3-n)-3(2n-3)\\&=(n-1)n(n+1)-3(2n-3)\end{aligned}$$

よって，前半の項は連続 3 整数の積，後半の項は 3 の倍数なので，与式は 3 の倍数。

理系第 3 問

［問題］　(35 点)

α は $0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，四角形 ABCD に関する次の 2 つの条件を考える。

(i)　四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する。
(ii)　$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{DAB}=\alpha.$

条件(i)と(ii)を満たす四角形のなかで，4 辺の長さの積

$$k=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}$$

が最大となるものについて，k の値を求めよ。

…………………………………………………………

［解答の概略］

図を描いてみれば 1 変数で図が決まるので，次元量 1 の問題である。
あとは，各辺の長さを求めるのに，角度があればよいので，適当な角をおいて，4 辺の長さを表せばよい。

$$k=16\sin\theta\sin(2\alpha-\theta)\sin^2(\alpha-\theta)$$

と求まった後は，三角関数の最大・最小なので，
　変数を一箇所にまとめる
ことを意識して変形するとよい。α は定数，θ が変数であることに注意。
このとき，むやみに加法定理で展開をしてしまうのではなく，まずは次数を下げる方向で式変形を考えてみること。
前半 2 項を見れば，和積公式から，$2\alpha-2\theta$ と θ が一方にまとまること，後半の項は半角公式から，中身が $2\alpha-2\theta$ となることが見えれば，［解答］のような変形が見えてくる。
$\cos(2\alpha-2\theta)$ のカタマリを置換したら，変域を確認するのを忘れないこと。

$$k=-4(X-1)(X-\cos 2\alpha)$$

はただの 2 次関数なので，軸が区間内かどうかで判断すればよい。

［解答］

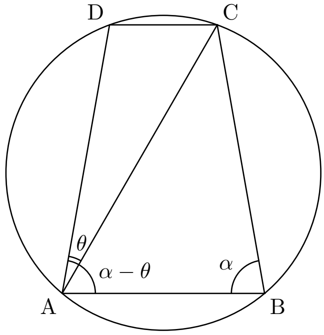
(ii)より，

$$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{DAB}=\alpha$$

四角形 ABCD は内接四角形なので，

$$\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{BCD}=\pi-\alpha$$

よって，四角形 ABCD は等脚台形なので，次の図のようになる。



よって，$\angle\mathrm{CAD} = \theta$ とおくと，

$$\angle\mathrm{CAB} = \alpha - \theta$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ において，内角の和は π なので，

$$\angle\mathrm{ACB} = \pi - 2\alpha + \theta$$

また $\mathrm{AB} /\!/ \mathrm{CD}$ だから，錯角が等しく，

$$\angle\mathrm{DCA} = \alpha - \theta$$

よって，$\triangle\mathrm{ABC}$, $\triangle\mathrm{ACD}$ で正弦定理を用いて，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin(\pi - 2\alpha + \theta)} = \frac{\mathrm{BC}}{\sin(\alpha - \theta)} = 2$$

$$\frac{\mathrm{CD}}{\sin\theta} = \frac{\mathrm{AD}}{\sin(\alpha - \theta)} = 2$$

$$\therefore\ \ \mathrm{AB} = 2\sin(2\alpha - \theta),\ \mathrm{BC} = 2\sin(\alpha - \theta)$$

$$\mathrm{CD} = 2\sin\theta,\ \mathrm{DA} = 2\sin(\alpha - \theta)$$

したがって，

$$\begin{aligned} k &= 16\sin\theta\sin(2\alpha - \theta)\sin^2(\alpha - \theta) \\ &= 4\{-\cos 2\alpha + \cos(2\alpha - 2\theta)\}\{1 - \cos(2\alpha - 2\theta)\} \end{aligned}$$

ここで，$X = \cos(2\alpha - 2\theta)$ とおくと，

$$\begin{aligned} k &= -4(X - \cos 2\alpha)(X - 1) \\ &= -4\left(X - \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right)^2 + (1 - \cos 2\alpha)^2 \end{aligned}$$

$0 < \theta < \alpha$ に注意すると，

$$0 < 2\alpha - 2\theta < 2\alpha \leqq \pi$$

よって，この区間において cos は単調減少なので，

$$1 > X > \cos 2\alpha$$

軸位置 $X = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ はこの区間内に入っているので，最大値は，

$$(1 - \cos 2\alpha)^2 = \boldsymbol{4\sin^4\alpha}$$

《採点基準》

- k を 1 変数で表して　10 点
- 変域を正しくとれて　5 点
- 区間内での最大値を与える場所を議論できて　10 点
- 答えに　10 点

［解説］

図形量の最大・最小問題である。

［図形量の最大・最小］

図形量の最大・最小問題を扱うときは，

① 図を描いて，何変数で図形が決まるのかを確認。
➡次元量
② 対象となる図形量を求めるのに必要な変数をおく。
（変数設定は，長さ・角度が一般的）
③ 変数をおいたら，変域を確認。
④ 最後に，何個変数をおいても構わないが，

（次元量）＝（おいた変数の個数）−（等式条件の個数）

に従って，等式条件を求める。

上のように扱うのが基本。変数設定の際は，困ったら角度を優先しておいておけば，正弦・余弦定理から長さは求まることに注意する。

因みに，今回は円に内接する四角形で(ii)を満たすものは，等脚台形に限られる。したがって，これで外接円の存在は特に意識せず扱えるので，［解答］のように変数を設定したが，外接円の意識が強く残っていた場合は，各頂点と外心を結び，中心角を変数に取った人も多かったのではないだろうか。この場合は場合分けが生じるので注意すること。

［別解：中心角を変数に］

(ii)より，

$$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{DAB} = \alpha$$

四角形 ABCD は内接四角形なので，

$$\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{BCD} = \pi - \alpha$$

よって，四角形 ABCD は等脚台形である。

(i)　$\alpha > \dfrac{\pi}{4}$ のとき $\cdots(*)$：

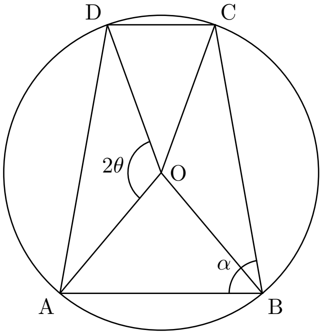
(a)　外接円の中心が四角形の内部にあるとき：

円の中心を O として，$\angle\mathrm{AOD} = 2\theta$ とおくと，$\triangle\mathrm{AOD}$ が二等辺三角形なので，

$$\angle\mathrm{OAD} = \angle\mathrm{ODA} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

よって，$\angle\mathrm{DAB}=\alpha$，$\angle\mathrm{ADC}=\pi-\alpha$ に注意して，

$$\angle\mathrm{OAB}=\alpha+\theta-\frac{\pi}{2},\ \angle\mathrm{ODC}=\frac{\pi}{2}+\theta-\alpha$$



したがって，

$$\angle\mathrm{AOB}=2\pi-2\alpha-2\theta,\ \angle\mathrm{DOC}=2\alpha-2\theta$$

等脚台形であることに注意して，$\angle\mathrm{BOC}=2\theta$ となるから，

$$\mathrm{AB}=2\sin(\pi-\alpha-\theta)=2\sin(\alpha+\theta)$$

$$\mathrm{BC}=2\sin\theta$$

$$\mathrm{CD}=2\sin(\alpha-\theta),\ \mathrm{AD}=2\sin\theta$$

また，変域について，

$$0<\angle\mathrm{AOB},\ \angle\mathrm{BOC},\ \angle\mathrm{COD},\ \angle\mathrm{DOA}<\pi$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{2}-\alpha<\theta<\pi-\alpha,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2},\ \alpha-\frac{\pi}{2}<\theta<\alpha$$

$0<\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$ に注意すれば，

$$\frac{\pi}{2}-\alpha<\theta<\alpha$$

※これが起こるのは，$\frac{\pi}{2}-\alpha<\alpha$ のときで，$\alpha>\frac{\pi}{4}$ に限られる。

したがって，

$$\begin{aligned}k&=16\sin^2\theta\sin(\alpha-\theta)\sin(\alpha+\theta)\\&=-8\sin^2\theta(\cos2\alpha-\cos2\theta)\\&=-4(\cos2\theta-1)(\cos2\theta-\cos2\alpha)\end{aligned}$$

$(0\leqq)\ \pi-2\alpha<2\theta<2\alpha\ (\leqq\pi)$ なので，

$$\cos2\alpha<\cos2\theta<\cos(\pi-2\alpha)\ (=-\cos2\alpha)$$

に注意して，k を $\cos2\theta$ の 2 次関数と見ると，軸位置は

$$\cos2\theta=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$$

$\alpha>\frac{\pi}{4}$ より，$\cos2\alpha<0$ に注意すると，$\cos2\alpha<\frac{1+\cos2\alpha}{2}$ なので，

(A)　$\frac{1+\cos2\alpha}{2}<-\cos2\alpha\Leftrightarrow\cos2\alpha<-\frac{1}{3}$ のとき：

$$\cos2\theta=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$$

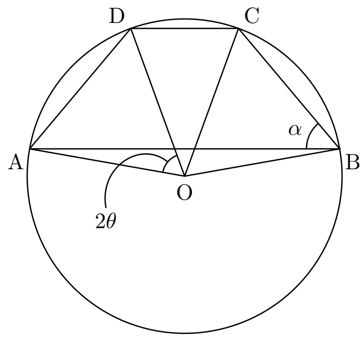
で最大値をとる。

(B)　$-\frac{1}{3}\leqq\cos2\alpha\ (<0)$ のとき：

軸位置は区間の右側にあるので，k は $\cos2\theta$ の単調増加で，

$$k<-8\cos2\alpha(\cos2\alpha+1)$$

(b)　外接円の中心が四角形の周上または外部にあるとき：



$\angle\mathrm{AOD}=2\theta$ とおいて，上と同様に考えると，

$$\angle\mathrm{AOB}=2\theta+2\alpha,\ \angle\mathrm{BOC}=2\theta,\ \angle\mathrm{COD}=2\alpha-2\theta$$

よって，

$$\mathrm{AB}=2\sin(\theta+\alpha),\ \mathrm{BC}=2\sin\theta,$$

$$\mathrm{CD}=2\sin(\alpha-\theta),\ \mathrm{DA}=2\sin\theta$$

一方変域に関しては，$\alpha>\frac{\pi}{4}$ で考えていることに注意すれば，

$$0<\theta\leqq\frac{\pi}{2}-\alpha$$

$$\begin{aligned}k&=16\sin^2\theta\sin(\theta+\alpha)\sin(\alpha-\theta)\\&=-8\sin^2\theta(\cos\alpha-\cos\theta)\\&=-4(\cos2\theta-1)(\cos2\theta-\cos2\alpha)\end{aligned}$$

この場合も $-\cos2\alpha\leqq\cos2\theta<1$ なので，

(A)　$\frac{1+\cos2\alpha}{2}<-\cos2\alpha\Leftrightarrow\cos2\alpha<-\frac{1}{3}$ のとき：

軸位置は区間の右側にあるので，k は $\cos2\theta$ の単調減少で，

$$k<-8\cos2\alpha(\cos2\alpha+1)$$

(B)　$-\frac{1}{3}\leqq\cos2\alpha\ (<0)$ のとき：

$$\cos2\theta=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$$

で最大値をとる。

$$(1-\cos 2\alpha)^2+8\cos 2\alpha(1+\cos 2\alpha)$$
$$=(3\cos 2\alpha+1)^2 \geqq 0$$

であり，以上(a)(b)から，(A), (B)の場合いずれも，最大値は $(1-\cos 2\alpha)^2$ である。

(ⅱ) $0<\alpha \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき：
これは(ⅰ)の(b)の場合しか考えなくてよい。また，変域に関しては，$\alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}-\alpha$ となるので，

$$0<\theta \leqq \alpha \qquad \therefore\ \cos 2\alpha \leqq \cos 2\theta < 1$$

やはり軸位置は区間内にあり，最大値は $(1-\cos 2\alpha)^2$ となる。

以上から，求める最大値は $\boldsymbol{(1-\cos 2\alpha)^2=4\sin^4\alpha}$ となる。

［別解注意１］

別解(ⅰ)の（$*$）の場合分けについては，解答中「※」の変域から出てきていることに注意する。θ が存在する条件としてこの場合分けが必要となる。

つまり，

(ⅰ) $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき：
「外心が四角形の内部・外心が四角形の周上または外部」それぞれの最大値の大きい方が最大値

(ⅱ) $0<\alpha \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき：
「外心が四角形の周上または外部のとき」のみ考えて最大値

と考えている。今回は(ⅰ)(ⅱ)の最大値が一致したので，α で場合分けする必要なく答えているが，一致しなければ，α で場合分けをして答える必要がある。

［別解注意２］

上のようにそれぞれ動かすと状況が見えづらくて仕方ない。(a), (b)（O が四角形の内部・外部）のいずれの場合も

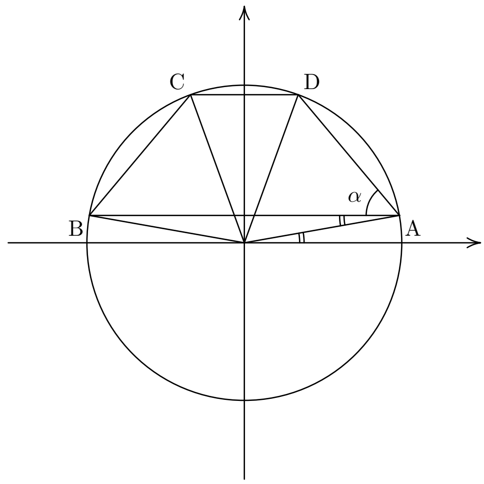
$$k=-4(\cos 2\theta-1)(\cos 2\theta-\cos 2\alpha)$$

となることから，(a), (b)の変域をまとめて，これを $0<\theta<\alpha$ で動かすのが現実的である。

［別解参考］

今回は，「中心角」を考えるために，外心が四角形の内部か周上または外部かで場合分けをしたが，中心角ではなく，座標を設定してしまえば，こういった場合分けは必要ない。

この場合は，例えば $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，



上図のようになり，錯角は等しいので，

$$\angle\mathrm{OAD}=\alpha+\theta$$

よって，$\angle\mathrm{AOD}=\pi-2(\alpha+\theta)$ だから，D の偏角は，

$$\theta+\pi-2(\alpha+\theta)=\pi-\theta-2\alpha$$

（※これが $\theta<0$ でも成立する）

よって，$\mathrm{D}(-\cos(\theta+2\alpha),\ \sin(\theta+2\alpha))$ となる。

等脚台形に注意すれば，

$$\mathrm{B}(-\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{C}(\cos(\theta+2\alpha),\ \sin(\theta+2\alpha))$$

となる。一方，θ の変域に関しては，

$$-\frac{\pi}{2}<\theta<\pi-\theta-2\alpha<\frac{\pi}{2}$$

となるので，

$$\frac{\pi}{2}-2\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}-\alpha$$

で考えればよい。

［参考］

内接四角形の対辺の積　➡　トレミーの定理

という発想があれば，以下のように幾何的に処理することもできる。

$\because$ 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接し，

$$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{DAB}=\alpha$$

より，$\triangle\mathrm{ABC},\ \triangle\mathrm{DAB}$ において正弦定理から，

$$\mathrm{AC}=\mathrm{BD}=2\sin\alpha$$

ここで，四角形 ABCD は内接四角形だから，トレミーの定理より，

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{DA}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\ (=4\sin^2\alpha)\ \cdots ①$$

ここで，$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}$, $\mathrm{DA}\cdot\mathrm{BC}>0$ だから，相加・相乗平均の関係から，

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{DA}\cdot\mathrm{BC}\geqq 2\sqrt{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}}$$

①から，

$$4\sin^2\alpha\geqq 2\sqrt{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}}$$

$$\therefore\ \mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}\leqq 4\sin^4\alpha$$

ここで，等号が成立するのは

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}=\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}=2\sin^2\alpha$$

のときである。

ここで，$\mathrm{CD}\to 0$ のとき，四角形 ABCD は二等辺三角形 ABC $(=\triangle\mathrm{ABD})$ に近づき，このとき

$$\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}\to 2\sin\alpha\times 2\sin\alpha=4\sin^2\alpha$$

一方，B, C が同一点に近づくとき，

$$\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}\to 0$$

$\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}$ はこの間を連続的に変化し，$2\sin^2\alpha<4\sin^2\alpha$ に注意すれば，

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}=\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}=2\sin^2\alpha$$

となる四角形 ABCD は確かに存在する。よって，最大値は

$\boldsymbol{4\sin^4\alpha}$

理系第 4 問

［問題］　　（35 点）

コインを n 回投げて複素数 z_1, z_2, $\cdots$, z_n を次のように定める。

(i)　1 回目に表が出れば $z_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とし，裏が出れば $z_1=1$ とする。

(ii)　$k=2, 3, \cdots, n$ のとき，k 回目に表が出れば $z_k=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}z_{k-1}$ とし，裏が出れば $z_k=\overline{z_{k-1}}$ とする。ただし，$\overline{z_{k-1}}$ は z_{k-1} の共役複素数である。

このとき，$z_n=1$ となる確率を求めよ。

…………………………………………………………

［解答の概略］

> 確率の問題だが，z_n から z_{n+1} への推移が与えられているので，漸化式を立てることを考えてみるとよい。確率の漸化式を考えるときは，
>
> **最初か最後に注目する**
>
> のが基本。今回は最後に注目してみれば，n 回コインを投げた後に起こりえる状態が，
>
> $$z_n=1,\ \omega,\ \overline{\omega}$$
>
> と限定されるので，これらに数列をおいて，推移図を描けばよい。このとき，
>
> **確率の和 ＝ 1**
>
> を忘れないようにすること。

［解答］

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおく。

z_n が $1,\ \omega,\ \overline{\omega}$ のいずれかとすると，

$$z_{n+1}=\omega z_n,\ \overline{z_n}$$

なので，z_{n+1} は $1,\ \omega,\ \overline{\omega}$ のいずれかとなる。

z_1 が $1,\ \omega$ のいずれかであることと合わせて，帰納的に z_n は $1,\ \omega,\ \overline{\omega}$ のいずれか。よって，

$$z_n=1,\ \omega,\ \overline{\omega}$$

となる確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n とおく。

$$\omega\overline{\omega}=1,\ \omega^2=\overline{\omega}$$

に注意すれば，推移図は以下のようになる。